

Bertrand Russel

Der Barbier

Russell formulierte 1918 das Barbier-Paradoxon mit folgenden Worten:

Man kann einen Barbier als einen definieren, der all jene und nur jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Die Frage ist: Rasiert der Barbier sich selbst?

Beim Versuch, die Frage zu beantworten, ergibt sich ein Widerspruch. Denn angenommen, der Barbier rasiert sich selbst, dann gehört er zu denen, die er laut Definition nicht rasiert, was der Annahme widerspricht. Angenommen, es gilt das Gegenteil, und der Barbier rasiert sich nicht selbst, dann erfüllt er selbst die Eigenschaft derer, die er rasiert, entgegen der Annahme. Logisch drückt dies folgende widersprüchliche Äquivalenz für den Barbier x aus:

x rasiert x nicht (x rasiert x)

Russells Lösung

Russell sagte, dass dieses Paradoxon leicht zu lösen sei. Das zeigte er bereits 1903 in einem indirekten Beweis mit einer variablen Relation. Liest man diesen rückwärts, so entsteht ein direkter Beweis, in dem ***rasiert*** für seine variable Relation steht:

Die Aussage x rasiert y nicht (y rasiert y), die den Barbier definiert, sei mit Bxy abgekürzt.

Es gilt die Negation des Widerspruchs x rasiert x nicht (x rasiert x), das heißt: nicht Bxx .

Daher kann der Existenzquantor eingeführt werden: Es gibt y : nicht Bxy .

Durch Einführung des Allquantors ergibt sich: Für alle x : Es gibt y : nicht Bxy .

Durch Umformung der Quantoren erhält man schließlich: Es gibt kein x : Für alle y : Bxy .

Diese beweisbare Aussage heißt aber im Klartext: Es gibt keinen, der genau diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Die auf den ersten Blick sinnvoll erscheinende Barbier-Definition erzeugt also einen harmlosen leeren Begriff beziehungsweise eine leere Menge. Die Antinomie führt die Barbier-Definition ad absurdum. Russells Lösung zeigt nur den Definitionsfehler auf, gibt aber keine Lösung an, wie der Barbier eines Ortes sinnvoll zu definieren wäre. Das ist auch unwichtig, denn seine fiktive Barbier-Definition diente ihm nur zur Veranschaulichung seines abstrakten Gedankengangs für beliebige Relationen. Darin liegt die Bedeutung des Barbier-Paradoxons. Mathematisch und philosophisch bedeutungsvoll ist hauptsächlich die Variante, bei der statt rasiert das umgekehrte Elementprädikat steht, das die Russellsche Antinomie erzeugt, den wichtigsten Widerspruch in der naiven Mengenlehre.

Private Anmerkung:

Abgesehen von trivialen Lösungen wie „der Friseur hat eine Glatze“ oder er stammt nicht aus dem selben Ort etc.